

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН В СИСТЕМАХ ПОДАТЛИВЫХ ТРУБОК****Н.Н.Кизилова***Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина, Харьков*

Исследуется осесимметричное волновое течение вязкой несжимаемой жидкости в системе, состоящей из длинной тонкой упругодеформируемой трубки и терминального элемента с комплексной проводимостью. Получено выражение для проводимости системы с учетом отражения волн на конце трубки. Исследована зависимость проводимости от геометрических и механических параметров системы. Получено уравнение для определения гармоник, на которых проводимость имеет экстремумы. Показано, что эти гармоники являются резонансными, в том смысле, что любые изменения параметров терминального элемента вызывают значительные изменения амплитуд резонансных гармоник. Проведено исследование влияния изменения параметров модели в широком диапазоне, соответствующем артериальным руслам, на амплитуду и фазу входной проводимости системы. Обсуждается возможность использования предложенной модели для интерпретации данных пульсовой диагностики.

Досліджується осесимметрична хвильова течія в'язкої нестисливої рідини в системі, що складається з довгої тонкої упругодеформованої трубки і термінального елемента з комплексною провідністю. Отримано вираження для провідності системи з урахуванням відбиття хвиль на кінці трубки. Досліджена залежність провідності від геометричних і механічних параметрів системи. Отримано рівняння для визначення гармонік, на яких провідність має екстремуми. Показано, що ці гармоніки є резонансними, тобто будь-які зміни параметрів термінального елемента викликають значні зміни амплітуд резонансних гармонік. Проведено дослідження впливу зміни параметрів моделі в широкому діапазоні, який відповідає артеріальним руслам людини, на амплітуду і фазу входної провідності системи. Обговорюється можливість використання запропонованої моделі для інтерпретації даних пульсової діагностики.

Axisymmetric wave motion of a viscous incompressible liquid in the system, which is consisted of the long thin elastic tube and a terminal element with a complex conductivity is investigated. Expression for input conductivity of the system taking into account wave reflection at the end of the tube is calculated. The dependence of the conductivity on the geometrical and mechanical parameters of the system is investigated. The equation for calculation the harmonics where the conductivity reaches the extreme is obtained. The harmonics is considered as resonant, when any changes in terminal conductivity cause the significant changes in its amplitude. The influence of variations of the parameters of the model on the amplitude and the phase of the input conductivity has been investigated. Possible application of the model proposed here for the pulse diagnosis interpretation is discussed.

**ВВЕДЕНИЕ**

Закономерности распространения и отражения волн в заполненных жидкостью трубках из упругих и вязкоупругих материалов неоднократно исследовались в гидромеханике [1-11]. Помимо технических систем, возможные приложения такого рода задач связаны с методиками пульсовой диагностики, которые предусматривают определение состояния ряда внутренних органов и систем организма по характеристикам пульса некоторых артерий при их специальном поджатии. Существующие методики пульсовой диагностики основаны на эмпирических данных, а их рациональная интерпретация с точки зрения современной гидромеханики кровообращения отсутствует. Особенности распространения и отражения волн в артериях и системах артерий, а также в

модельных системах латексных трубок неоднократно исследовались теоретически и экспериментально [1,3-5,7].

На большом эмпирическом материале было показано, что линеаризованные модели осесимметричного волнового движения вязкой жидкости в податливых трубках адекватно описывают большинство обнаруженных экспериментально закономерностей [1-7]. Материал стенки трубки обычно считается линейным вязкоупругим, однородным и изотропным, а трубка – прикрепленной к окружающим тканям, которые допускают ее перемещения в радиальном направлении. Для трубок, у которых  $h/R \leq 0.1$ , где  $h$  - толщина стенки,  $R$  - внутренний радиус, использование моделей тонкостенных и толстостенных трубок приводит к одинаковым выражениям для величин, характеризующих распространение и отражение волн [1,2].

Локальные расширения или сужения сосудов, а также любые неоднородности механических свойств их стенок являются источником дополнительных отраженных волн в артериальных системах [1,3,7,8,10,11]. Сосудистое русло в целом или русла отдельных внутренних органов часто рассматриваются как упругая трубка с некоторой эффективной длиной и единственным местом отражения пульсовых волн на ее конце [1,5]. Учет многократных ветвлений сосудов и, таким образом, дополнительных источников отраженных волн позволяет исследовать особенности распространения пульсовых волн по артериальным руслам с определенной геометрией [3,4,10,11]. Исследован целый ряд особенностей распространения волн в ветвящихся системах податливых трубок [3,4,7,10,11], которые соответствуют строению ряда артериальных русел внутренних органов [11,12].

Спектральные характеристики пульсовой волны могут быть использованы в целях медицинской диагностики [9–11,13–16]. При исследовании параметров пульса должны учитываться особенности геометрии системы и ее механические свойства [10,11,13–16]. Один из методов анализа пульса базируется на наличии у артериальных систем внутренних органов собственных резонансных частот, что позволяет проводить диагностику, используя только спектральные характеристики пульса периферических артерий [13–15]. Набор частот связан с характером распространения и отражения волн в сосудистом русле данного органа и определяется геометрией русла [11,12,14–16]. Эксперименты и клинические наблюдения показали, что изменения состояния органа вызывают существенное изменение амплитуды резонансной частоты и лишь незначительные изменения амплитуд других частот. Например, спектр входного импеданса артериальной системы почек  $Z$ , который вычисляется как отношение амплитуд давления  $P$  и расхода  $Q$  на входе в основную артерию  $Z = P/Q$ , имеет максимум и минимум для второй и третьей гармоник пульсовой волны соответственно [14]. Аналогичный эффект удастся воспроизвести на модели системы кровообращения как эластичной трубки и

соединенной с ней системой упругих камер, собственная частота колебаний которых подбиралась в соответствии с резонансными частотами имитируемых органов [13]. Экспериментально обнаружена зависимость амплитудного и фазового спектра отраженной волны от длины основной артерии [15]. Наличие у артериальных русел резонансных свойств отмечалось и ранее, но только в работах последних лет стала широко обсуждаться возможность применения этих свойств для диагностики.

В настоящей работе на основе модели волнового течения вязкой жидкости исследуются резонансные свойства модели сосудистого русла, состоящей из деформируемой трубки с терминальным сопротивлением, определяющим условия отражения волн на конце трубки. Полученные результаты обсуждаются с точки зрения возможности их практического применения в медицинской диагностике.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим систему, состоящую из длинной тонкой трубки кругового сечения, имеющей длину  $L$  и радиус  $R$ , причем  $R/L \ll 1$ , соединенной последовательно с терминальным элементом с проводимостью  $Y_t$  (рис.1). Система рассматривается как модель артериального русла органа, который включен в общую систему кровообращения. При этом на входе в трубку задается давление  $p(t,0) = P e^{i\omega t}$ , где  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  - частота, а во входном сечении трубки могут быть измерены

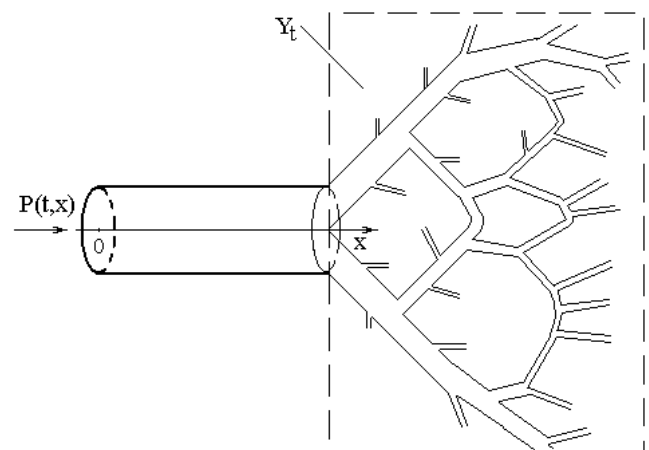


Рис.1. Модель сосудистого русла.

давление и объемный расход жидкости  $Q$  и вычислена входная проводимость  $Y = (Z)^{-1}$ .

Проводимость  $Y_t$  определяется строением и состоянием лежащего вниз по течению сосудистого русла и считается заданной величиной, в общем случае комплексной. Величина  $Y_t$  для терминального сосудистого русла конкретного органа может быть вычислена непосредственно по результатам прямых измерений давления и кровотока.

Исследуем волновое осесимметричное течение однородной несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho$  и вязкостью  $\mu$  в трубке, используя линеаризованные уравнения Навье-Стокса в связанной с трубкой цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

где  $P$  – давление,  $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$  – скорость течения,  $\nu = \mu / \rho$  – кинематическая вязкость. Материал трубки будем считать однородным и изотропным, а для тонкостенной трубки используем уравнения линейной теории осесимметричных оболочек [1,2]:

$$\begin{aligned} \rho_w h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= \left( p - 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} - \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left( \frac{u_r}{R^2} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \\ \rho_w h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= -\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \Big|_{r=R} + \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\rho_w, E, \sigma$  – плотность, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала стенки,  $R$  – внутренний радиус трубки,  $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$  – перемещение стенки. Приближение тонкостенной трубки может быть использовано для артерий внутренних органов, для которых выполняется условие

$h/R \leq 0.1$  [1]. Граничные условия на стенке трубки суть:

$$\begin{aligned} r = R &: v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}, v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} \\ r = 0 &: v_r = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

На конце трубки зададим условия непрерывности давления и расхода:

$$x = L : p = \frac{q(t)}{Y_t}, \quad Q = q(t) \quad (4)$$

где  $q(t)$  – объемный расход во входном сечении терминального русла.

Вводя характерные значения неизвестных задачи (1)-(3)  $p^*, v_r^*, v_x^*, u_r^*, u_x^*$  и соответствующие безразмерные величины  $p^\circ, v_r^\circ, v_x^\circ, u_r^\circ, u_x^\circ$ , а также безразмерные переменные  $t^\circ = t/t^*, r^\circ = r/R, x^\circ = x/L$ , из первого уравнения (1) получим  $v_r^*/v_x^* \sim R/L \ll 1$ . Следовательно, вторыми производными по  $x$  в (1) можно пренебречь. Теперь оставшиеся два уравнения (1) запишем в виде:

$$\frac{1}{St} \frac{R}{L} \frac{\partial v_r^\circ}{\partial t^\circ} = -\frac{1}{Eu} \frac{\partial p^\circ}{\partial r^\circ} + \frac{1}{Re} \frac{R}{L} \left( \frac{\partial^2 v_r^\circ}{\partial r^{\circ 2}} + \frac{1}{r^\circ} \frac{\partial v_r^\circ}{\partial r^\circ} - \frac{v_r^\circ}{r^{\circ 2}} \right) \quad (5)$$

$$\frac{1}{St} \frac{\partial v_x^\circ}{\partial t^\circ} = -\frac{1}{Eu} \frac{R}{L} \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_x^\circ}{\partial r^{\circ 2}} + \frac{1}{r^\circ} \frac{\partial v_x^\circ}{\partial r^\circ} \right)$$

где  $St, Eu, Re$  – числа Струхала, Эйлера и Рейнольдса соответственно.

В первом уравнении (5) коэффициенты при производных  $v_r^\circ$  имеют порядок  $R^2/L^2$  и ими можно пренебречь по сравнению с производной от давления, поэтому уравнение сводится к соотношению  $\partial P / \partial r = 0$ .

Решение задачи будем искать в виде  $f_j = F_j(r) e^{i\omega(t-x/c)}$ , где  $f_j = \{p, v_r, v_x, u_r, u_x\}$  – вектор неизвестных,  $F_j = \{P, V_r, V_x, U_r, U_x\}$  – амплитуды неизвестных,  $c$  – скорость

распространения пульсовой волны. Подставляя соответствующие выражения для неизвестных, из второго уравнения (5) получим уравнение Бесселя для амплитуды  $V_x^\circ$ :

$$\frac{d^2 V_x^\circ}{dr^{\circ 2}} + \frac{1}{r^\circ} \frac{dV_x^\circ}{dr^\circ} - i\omega \frac{Re}{St} V_x^\circ = \frac{Re}{Eu} \frac{R}{L} \frac{\partial p^\circ}{\partial x^\circ}$$

решение которого, удовлетворяющее условию (3), в размерном виде суть:

$$V_x(r) = \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dx} \left( 1 - \frac{J_0(i^{3/2} \alpha r/R)}{J_0(i^{3/2} \alpha)} \right) \quad (6)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $W = R\sqrt{\omega/\nu}$  – число Уомерсли. Объемный расход  $Q$  через сечение трубки с учетом (5) суть:

$$Q = 2\pi \int_0^R u_x r dr = Re \left\{ \frac{dp}{dx} \frac{e^{i\omega t} \pi R^2}{i\omega \rho} (1 - F_{01}) \right\}$$

где  $F_{01} = 2J_1(z)/(zJ_0(z))$  – функция Уомерсли,  $z = Wi^{3/2}$ ,  $J_1$  – функция Бесселя первого порядка. Подставляя (6) в (1)–(2), можно обычным способом получить дисперсионное уравнение, решения которого исследовались ранее для моделей тонко- и толстостенных трубок с разными условиями закрепления наружной стенки трубки [1–2]. Было обнаружено существование двух типов волн: волн давления, распространяющихся в жидкости и волн Ламе, распространяющихся в стенке трубки. Рассмотрим распространение волн первого типа, которые имеют скорость [1,2]:

$$c = c_0 \sqrt{\frac{1 - F_{10}}{1 - \sigma^2}}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho R}} \quad (7)$$

В общем случае  $c$  – комплексная величина, которая может быть определена из (7) в виде  $c = i\omega/(\alpha + i\beta)$ , где  $\beta = 2\pi/\lambda$ ,  $\alpha$  – коэффициент затухания волны, связанный с

деформируемостью стенки трубки [1]. При  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \omega/c_0$ , (7) переходит в формулу Моэнса-Кортевега:  $c = c_0$ . В силу зависимости  $F_{01}(\omega)$  имеет место дисперсия скорости  $c(\omega)$  и зависимость проводимости системы от частоты  $Y = Y(\omega)$ . Последнее свойство известно из результатов измерений давления и расхода в артериальных системах.

При наличии терминального элемента с проводимостью  $Y_t \neq Y_0$ , где  $Y_0 = S/(\rho c)$ , на конце трубки возникает отраженная волна. Здесь  $Y_0$  – характеристическая проводимость трубки, то есть проводимость при отсутствии отраженной волны. Система (1)–(3) описывает распространение волн давления  $p = Re^{i\omega(t-x/c)}$  и расхода  $Q = Y_0 Re^{i\omega(t-x/c)}$  вверх и вниз по течению, поэтому ее общее решение можно записать в виде суперпозиции проходящей и отраженной волн с амплитудами  $p_0$  и  $p_1$  соответственно:

$$p(t, x) = p_0 e^{i\omega(t-x/c)} + p_1 e^{i\omega(t+(x-2L)/c)} \quad (8)$$

$$Q(t, x) = Y_0 (p_0 e^{i\omega(t-x/c)} - p_1 e^{i\omega(t+(x-2L)/c)})$$

Теперь входную проводимость системы  $Y = Q(t, 0)/p(t, 0)$  можно определить из (8) и условий (4). Учитывая, что  $Y_t = q(t)/p(t, L)$ , из (4), (8) получим

$$Y = Y_0 \frac{1 - \Gamma e^{-2i\omega L/c}}{1 + \Gamma e^{-2i\omega L/c}} \quad (9)$$

где  $\Gamma = p_1/p_0 = (1 - Y_t^\circ)/(1 + Y_t^\circ)$  – коэффициент отражения волны на конце трубки,  $Y_t^\circ = Y_t/Y_0$  – безразмерная проводимость терминального элемента.

В общем случае терминальная проводимость имеет вид  $Y_t^\circ = Y_1 + iY_2$ , где  $Y_1$  и  $Y_2$  связаны соответственно с резистивным сопротивлением и податливостью терминального элемента. Представив безразмерную проводимость системы  $Y^\circ = Y/Y_0$  в общем виде  $Y^\circ = ye^{i\psi}$ , из (9)

получим выражения для ее амплитуды  $Y$  и фазы  $\Psi$ :

$$y = \frac{\left( \left( \zeta^2 - \Gamma_3 \right)^2 (1 + \tau^2)^2 + 16\zeta^2 \left( \tau\Gamma_1 + (1 - \tau^2)\Gamma_2 \right)^2 \right)^{1/2}}{(\zeta^2 + \Gamma_3)(1 + \tau^2) + 2\zeta((1 - \tau^2)\Gamma_1 - 4\tau\Gamma_2)} \quad (10)$$

$$\psi = \arctg \left( \frac{4\zeta(\Gamma_1\tau + \Gamma_2(1 - \tau^2))}{(\zeta^2 - \Gamma_3)(1 + \tau^2)} \right) \quad (11)$$

где  $\Gamma_1 = (1 - Y_1^2 - Y_2^2)/\delta$ ,  $\Gamma_2 = 2Y_2/\delta$ ,

$\Gamma_3 = ((1 - Y_1)^2 + Y_2^2)/\delta$ ,  $\delta = (1 + Y_1)^2 + Y_2^2$ ,

$\zeta = e^{2\alpha L}$ ,  $\alpha = \frac{\omega \operatorname{Im}(c)}{|c|^2}$ ,  $\tau = \operatorname{tg}(\beta L)$ ,

$\beta = \frac{\omega \operatorname{Re}(c)}{|c|^2}$ ,  $|c| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(c) + \operatorname{Im}^2(c)}$ .

Величина  $Y^\circ$  определяет параметры пульсовой волны, которая отражается сосудистым руслом органа, распространяется по всей системе кровообращения и содержит информацию о состоянии данного органа. В рамках предложенной модели это состояние определено параметрами  $Y_{1,2}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $E$ ,  $\sigma$ ,  $h$ ,  $R$ ,  $L$ , характеризующими свойства терминального сосудистого русла, геометрию и механические свойства трубки (основной артерии органа).

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВХОДНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ.

Для трубки с закрытым концом ( $Y_1 = 0$ ,  $Y_2 = 0$ ) из (10)-(11) получаем:

$$y = \frac{\left( (\zeta^2 - 1)^2 (1 + \tau^2)^2 + 16\tau^2 \zeta^2 \right)^{1/2}}{(\zeta^2 + 1)(1 + \tau^2) + 2\zeta(1 - \tau^2)},$$

$$\psi = \arctg \left( \frac{4\tau\zeta}{(\zeta^2 - 1)(1 + \tau^2)} \right) \quad (12)$$

При  $\operatorname{Im}(c) = 0$  из (12) следует  $y = \tau$ ,  $\psi = \pm\pi/2$ , что соответствует результатам [1]. Соотношение (12) позволяет исследовать

зависимость  $y(\alpha)$  амплитуды входной проводимости от коэффициента затухания пульсовой волны  $\alpha$ . При  $\alpha \rightarrow \infty$  функция  $y(\alpha) \rightarrow 1$ , причем при  $\alpha > 2$  имеем  $0.95 < y(\alpha) < 1$  и амплитуда близка к единице. Если  $|\tau| < 1$ , то  $0 < y < 1$  и наоборот, если  $|\tau| > 1$ , то  $y > 1$ . Таким образом, соотношение между проводимостью системы и характеристической проводимостью трубки определяется параметром  $\tau$ , что также согласуется с результатами предыдущих исследований [1].

В случае чисто резистивного терминального сопротивления и согласования проводимостей трубки и терминального элемента (приближение длинной трубки,  $Y_1 = 1$ ,  $Y_2 = 0$ ) из (10)-(11) имеем  $y = 1$ ,  $\psi = \pm\pi/2$ . Таким образом, при этом проводимость системы совпадает с характеристической при любых значениях параметра  $\alpha$ .

В случае достаточно короткой трубки с длиной  $L \ll |c|^2/(\omega \operatorname{Re}(c))$  из (10)-(11) имеем:

$$y = \frac{\left( (\zeta^2 - \Gamma_3)^2 + 16\zeta^2 \Gamma_2^2 \right)^{1/2}}{\zeta^2 + \Gamma_3 + 2\zeta\Gamma_1},$$

$$\psi = \arctg \left( \frac{4\zeta\Gamma_2}{\zeta^2 - \Gamma_3} \right) \quad (13)$$

При  $\alpha \rightarrow 0$  (13) переходят в известные соотношения [1]:

$$y = \left( Y_1^2 + Y_2^2 \right)^{1/2}, \quad \psi = \arctg(Y_2/Y_1)$$

При заданных значениях  $Y_{1,2}$  с ростом  $\alpha$  амплитуда проводимости  $y(\alpha) \rightarrow 1$ . В качестве иллюстрации зависимости  $y(\alpha)$  для ряда значений параметра  $Y_1$  при фиксированном  $Y_2$  приведены на рис.2. Соответствующие зависимости  $y(\alpha)$  при фиксированном значении  $Y_1$  и вариациях  $Y_2$  имеют сходный вид. При фиксированных значениях  $\tau$  зависимости  $y(\alpha)$  имеют вид, аналогичный кривым, приведенным на рис.2. При этом в зависимости от соотношения между величинами  $Y_{1,2}$  и значений  $\tau$  амплитуда

проводимости системы может стать как меньше ( $y < 1$ ), так и больше ( $y > 1$ ) характеристической проводимости трубки.

Используя (10), получим, что  $y > 1$ , если выполняются следующие условия:

$$\Gamma_1 < 0, \beta L \in [\pi n, \pi/2 + \pi n] \text{ или}$$

$$\Gamma_1 > 0, \beta L \in [\pi/2 + \pi n, \pi(n+1)], \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

При этом проводимость рассматриваемой системы становится больше проводимости трубки. В противном случае  $y < 1$ . Для чисто резистивного ( $Y_2 = 0$ ) терминального элемента и для случая  $Y_1 = 0$  (10)-(11) переходят при  $\alpha = 0$  в рассматривавшиеся ранее соотношения [1].

Исследуем зависимость входящих в (10)-(11) величин  $\alpha, \beta$  от тех параметров системы, которые входят в соотношения (7). Для значений  $E, \sigma, \mu, R, h$  выберем диапазоны, соответствующие их физиологическим вариациям в сосудистой системе человека:  $E = 5 \cdot (10^5 - 10^7)$  Па,  $\sigma = 0.2 - 0.4$ ,  $\mu = (3 - 10) \cdot 10^{-3}$  Па·с,

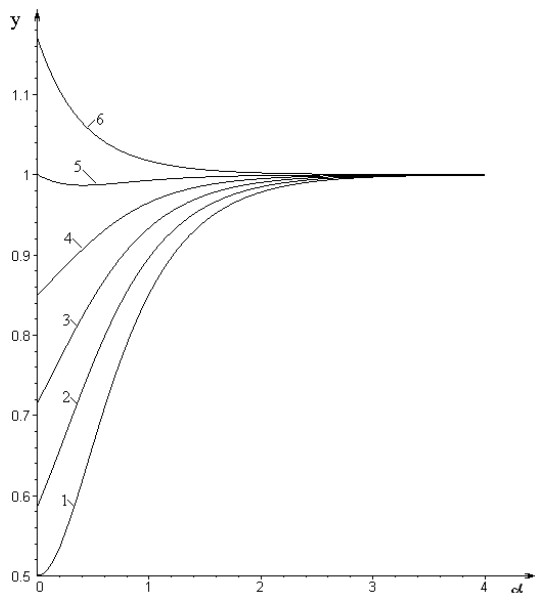
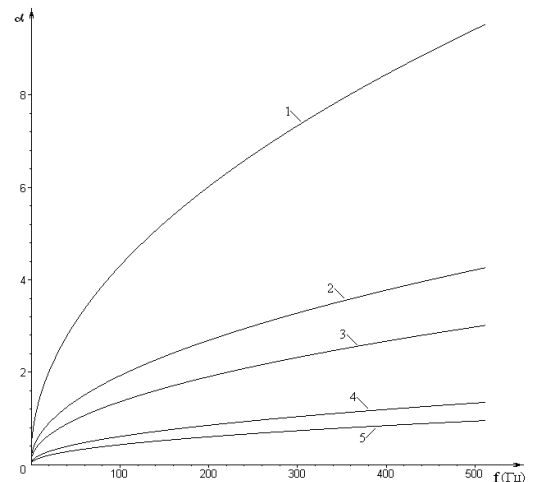


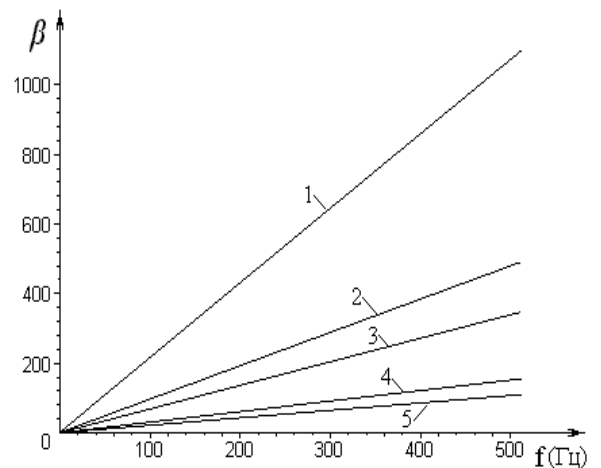
Рис.2. Зависимости  $y(\alpha)$  при  $Y_2 = 0.5$ ,  $Y_1 = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$  (кривые 1-6 соответственно).

$R = 0.1 - 5$  мм,  $h = 0.01 - 0.5$  мм, принимая во внимание первоначальное допущение модели  $h/R \leq 0.1$ . Результаты исследования показали, что при фиксированной частоте  $\omega$  значения  $\alpha$  монотонно увеличиваются с

ростом  $\mu$  и монотонно убывают с ростом значений остальных параметров. Наиболее значительное влияние на коэффициент затухания пульсовой волны  $\alpha$  оказывают изменения диаметра и толщины трубки (при этом в диапазоне частот  $f = 0 - 2^9$  Гц величина  $\alpha$  увеличивается в 8.2 и 3.4 раза соответственно) и изменение модуля упругости стенки трубки ( $\alpha$  увеличивается в 1.9 раза). При этом  $\alpha(\omega) \sim \sqrt{\omega}$ , а  $\beta(\omega) \sim \omega$ . Для иллюстрации зависимости  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  приведены на рис.3 а,б. В исследованном



а



б

Рис.3. Зависимости  $\alpha(\omega)$  - (а) и  $\beta(\omega)$  - (б) при фиксированных значениях  $\sigma, \mu, R, h$ . Кривые 1-5 соответствуют значениям  $E = 5 \cdot 10^5; 10^6; 5 \cdot 10^6; 10^7; 5 \cdot 10^7$  Па соответственно.

диапазоне частот при вариации геометрических и механических параметров трубки и вязкости крови коэффициент затухания пульсовой волны  $\alpha \leq 9.27$  м<sup>-1</sup>. Стоит

заметить, что при различных патологиях изменения параметров сосудистой стенки часто происходят согласованно, что должно быть учтено для более детальных оценок возможных диапазонов значений параметра  $\alpha$ . Следует ожидать значительного роста величины  $\alpha$  при патологиях, связанных с увеличением податливости сосудистой стенки, при аневризмах сосудов и отеке тканей. В норме влияние параметра  $\alpha$  на амплитуду и фазу проводимости системы связано также с длиной трубки. По данным [13,15] величина  $L$  сильно влияет на резонансные свойства входной проводимости сосудистого русла.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ ВХОДНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

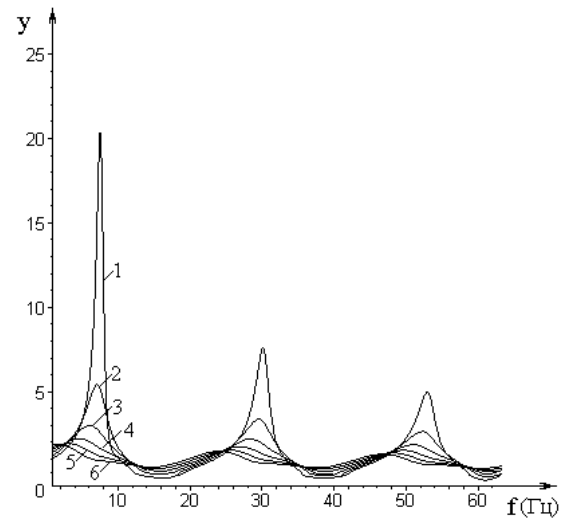
Поскольку предложенная в [13-15] новая методика пульсовой диагностики связана с наличием у входной проводимости резонансных частот, исследуем зависимости  $y(\omega) = y(\alpha(\omega)L, \tau(\omega))$ ,  $\psi(\omega) = \psi(\alpha(\omega)L, \tau(\omega))$ , используя (10)-(11). Из условия  $y'_{\omega} = 0$  можно получить трансцендентное уравнение для определения резонансных частот:

$$y'_{\alpha} \alpha'_{\omega} + y'_{\beta} \beta'_{\omega} = 0 \quad (14)$$

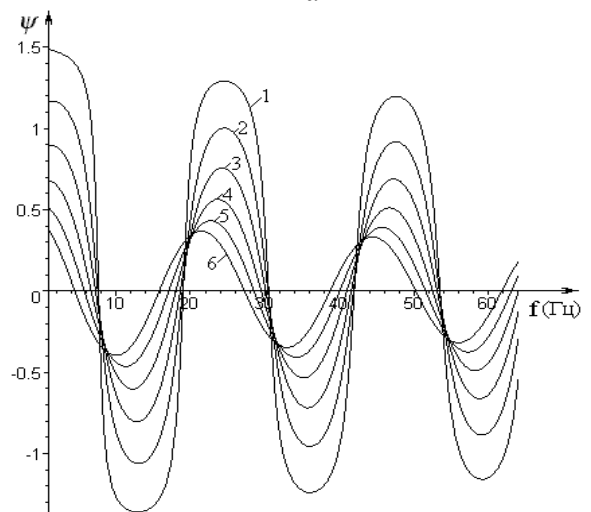
которое не приводится здесь полностью в силу своей громоздкости. Исследование корней уравнения (14) при различных значениях параметров модели показало, что значения  $\omega$ , на которых  $y(\omega)$  достигает экстремума, зависят от длины трубки, а амплитуды проводимости в точках экстремума определяются параметрами терминального русла  $Y_{1,2}$ . С ростом частоты амплитуда проводимости в точках максимума монотонно убывает (рис.4а), что связано с увеличением коэффициента затухания волн с ростом частоты (рис.3а). С ростом резистивной части терминальной проводимости  $Y_1$  и снижением ее податливости  $Y_2$  максимальные амплитуды входной проводимости снижаются (рис.4а). В точках, соответствующих максимумам амплитуды проводимости, фаза проводимости меняет знак (рис.4б). Эта особенность была исследована нами ранее

для ветвящихся артериальных русел с анастомозами [16]. Именно это свойство входной проводимости делает возможным анализ пульсовых кривых в тех случаях, когда за счет патологического повышения значений  $Y_1$  или уменьшения  $Y_2$  выделение отдельных максимумов на кривых  $y(f)$  становится затруднительным (например, кривые 5-6 на рис.4а).

Особый интерес представляет исследование свойств входной проводимости



а



б

Рис.4. Зависимости  $y(f)$  - (а) и  $\psi(f)$  - (б) при  $Y_2 = 0.5$ ,  $L = 20$  см,  $R = 0.5$  см,  $h = 0.5$  мм,  $E = 10^6$  Па,  $\sigma = 0.3$ ,  $\mu = 4.5 \cdot 10^{-3}$  Па·с,  $\rho = 1.05$  г/см<sup>3</sup>. Кривые 1-6 соответствуют значениям  $Y_1 = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$ .

при вариации тех параметров модели, которые соответствуют патологическим изменениям

кровообращения в рассматриваемом органе. Эти изменения могут быть разнообразными и в рамках данной модели определяются только двумя параметрами  $Y_{1,2}$ . Большая степень детализации может быть достигнута при моделировании терминального элемента  $Y_t$  системой податливых трубок (артерий) с определенной геометрией ветвлений [3,7,11]. На рис.5 а-б представлены результаты исследования влияния параметров  $Y_{1,2}$  на амплитуду входной проводимости  $y(n)$ , где  $n$  - номер гармоники в Фурье-спектре входной проводимости. В качестве основной выбрана частота  $f_0 = 1$  Гц, соответствующая средней частоте сердечных сокращений

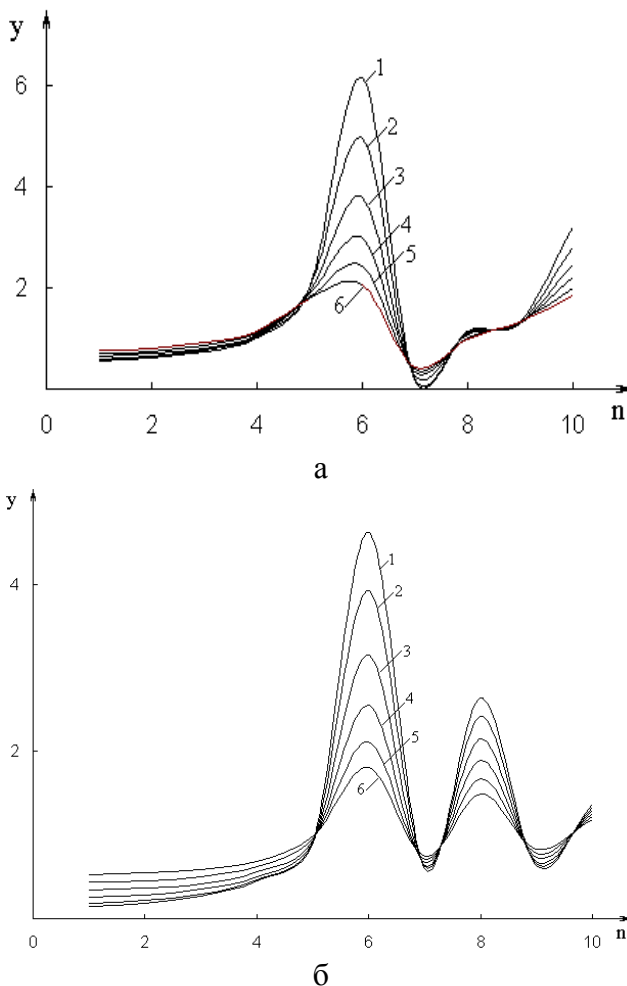


Рис.5. Зависимости  $y(n)$  для  $Y_2 = 0.5$  (а) и  $Y_2 = 0.1$  (б). Кривые 1-6 соответствуют значениям  $Y_1 = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1$ .

взрослого здорового пациента в состоянии покоя. Для приведенных на рис.5 а-б кривых длина основной артерии  $L = 10$  см

определяет набор резонансных гармоник модели, соответствующих  $n = 6, 8, 10$ . Изменения величины  $Y_1$  ведут к значительному изменению входной проводимости системы на  $n = 6$  при разных значениях  $Y_2$ . В то же время изменения податливости терминального элемента заметно изменяют амплитуду второй резонансной гармоники  $n = 8$ . Детальные расчеты показали, что изменения механических свойств трубки  $E, \sigma$  существенно изменяют амплитуду резонансной третьей гармоники  $n = 10$ , практически не вызывая изменений проводимости в области других резонансных частот. Фазовый спектр входной проводимости во всех случаях обладает свойством, отмеченным выше: в области резонансных гармоник происходит изменение знака фазы  $\psi(n)$ . Это свойство способствует точному определению набора резонансных гармоник даже в тех случаях, когда вследствие патологических изменений параметров системы амплитуды входной проводимости выражены слабо [16].

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Исследование модели артериального русла внутреннего органа показало, что входная проводимость, которая может быть рассчитана по результатам измерений колебаний давления и расхода во входном сечении основной артерии органа, обладает набором резонансных частот. На резонансных частотах амплитуда входной проводимости достигает максимальных значений. Набор резонансных частот определяется геометрией модели, причем в большей степени длиной основной артерии органа. Учитывая, что «калибр» артерии определяет размеры лежащего вниз по течению артериального русла, которое в модели рассматривается как терминальный элемент с комплексной проводимостью, можно считать, что резонансные частоты определяются геометрией артериального русла [11]. При этом изменения состояния терминального русла, связанные с его резистивными свойствами и податливостью стенок, приводят к значительным изменениям амплитуды резонансных гармоник и незначительным изменениям амплитуд остальных гармоник.



Так как все внутренние органы включены в общую систему кровообращения, то отражение пульсовой волны во входном сечении основной артерии соответствующего органа приведет к появлению в магистральных периферических артериях отраженной пульсовой волны, параметры которой, в соответствии с проведенным исследованием, будут определяться состоянием кровообращения в данном органе. Эти параметры будут в наибольшей степени сказываться на амплитудах соответствующих резонансных частот, которые в силу различия длин и механических свойств артерий разных органов будут разными. Это свойство делает возможным проводить неинвазивную диагностику состояния внутренних органов по параметрам пульса произвольной периферической артерии. При этом, если проводимость русла внутреннего органа патологически повышена (понижена), то в спектре кривых давления амплитуда соответствующих органу резонансных гармоник будет соответственно ниже (выше) нормы. Следовательно, регистрация пульсовых кривых на периферической артерии и анализ их спектра могут выявить изменения, связанные с патологией отдельных внутренних органов.

Следует отметить, что резонансные свойства артериальных русел неоднократно исследовались экспериментально и теоретически [1,3], однако после появления результатов клинических исследований [13-15] детальная разработка соответствующих диагностических методик и теоретических моделей стали особенно актуальны.

1. Milnor W.R. Hemodynamics. Baltimore: Williams & Wilkins. 1989. – 419p.
2. Cox R.H. Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis // J.Biomech. - 1969. – 2. – P.251-265.
3. Taylor M.G. The input impedance of an assembly of randomly branching elastic tubes. // Biophys.J. - 1966. - 6. – p.29-51.

4. Avolio A.P. Multi-branched model of the human arterial system // Med.Biol.Eng.Comput.-1980-18. - P.709-718.
5. Campbell K. B., Lee L. C., Frasch H. F., Noordergraaf A. Pulse reflection sites and effective length of the arterial system // Amer.J.Physiol.-1989. 256,N6.-P.H1684-H1689.
6. Reuderink P.J., Hoogstraten H.W., Sipkema P. et al Linear and nonlinear one-dimensional models of pulse wave transmission at high Womersley numbers // J.Biomech.- 1989. - 22.- P.819-827.
7. Brown D.J. Input impedance and reflection coefficient in fractal-like models of asymmetrically branching compliant tubes. // IEEE Trans.Biomed.Eng. - 1996. – 43. – P.715-22.
8. Селезов И.Т., Каплун Ю.М. Влияние сужения кровеносного сосуда на распространение пульсового давления крови // Бионика. - 1991. - N24. – С.50-54.
9. Моисеева И.Н., Регирер С.А. Некоторые особенности отражения пульсовых волн в артериях // Изв.АН СССР. МЖГ. - 1993. - №4. – С.134-139.
10. Бойчук И.П., Кизилова Н.Н. Отражение волн и анализ пульса лучевой артерии // Тезисы докл. V Всерос.конф. по биомеханике. Нижний Новгород. - 2000. - С.10.
11. Bondarenko M.Ye., Kizilova N.N. Pulse wave reflections in asymmetrically branching arterial networks // Russian J.Biomech. – 2002. – 6,N4.- P.52-62.
12. Dawson Ch.A., Krenz G.S., Karau K.L. et al Structure-function relationships in the pulmonary arterial tree // J.Appl.Physiol. - 1999. - 86. - P.569-583.
13. Wang Y.Y., Chang S.L., Wu Y.E., Hsu T.L., Wang W.K. Resonance. The missing phenomenon in hemodynamics. // Circ. Res. - 1991. - 69. – P.246-249.
14. Yu G.L., Wang Y.L., Wang W.K. Resonance in the kidney system of rats. // Am. J. Physiol. - 1994. - 267. – P.H1544-1548.
15. Wang Y.Y., Lia W.C., Hsiu H., Jan M.Y., Wang W.K. Effect of length on the fundamental resonance frequency of arterial models having radial dilatation. // IEEE Trans. Biomed. Eng. - 2000. - 47. – P.313-318.
16. Кизилова Н.Н. Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных систем // Тез.докл. IV междунар.конф. по неравновесным процессам в соплах и струях. - Санкт-Петербург. - 2002. - С.257-259.